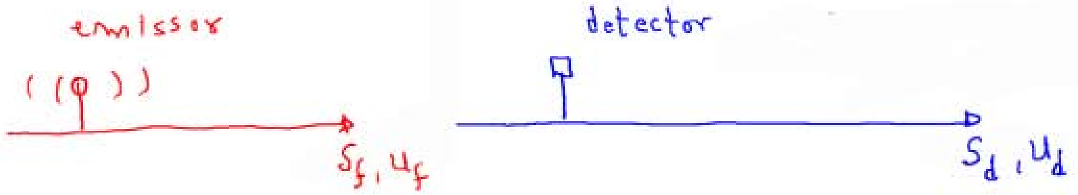
O efeito Doppler pré-relativístico.

Todos já devem ter observado que o som de um automóvel se aproximando é mais "fino" que o som do mesmo automóvel se afastando (tipo na fórmula 1). Este efeito deve-se à variação da frequência detectada como função da velocidade da fonte emissora.

Para obtermos o efeito Doppler pré-relativístico, devemos considerar que a onda (sonora) se propaga por um meio com velocidade $\underline{v}$ relativa à este meio.

★ Fonte se aproximando do detector.

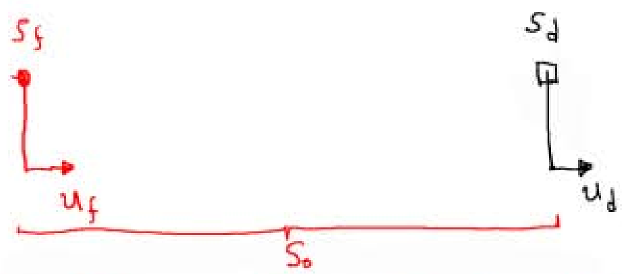
⇒ Vamos acoplar o emissor no sistema $\underline{S}'$, com frequência própria f'_i e vamos obter a frequência f detectada em S.



u_f e u_d são velocidades em relação ao meio de propagação da onda, para a fonte e o detector, respectivamente.

"$S \Rightarrow$ ref. do éter".

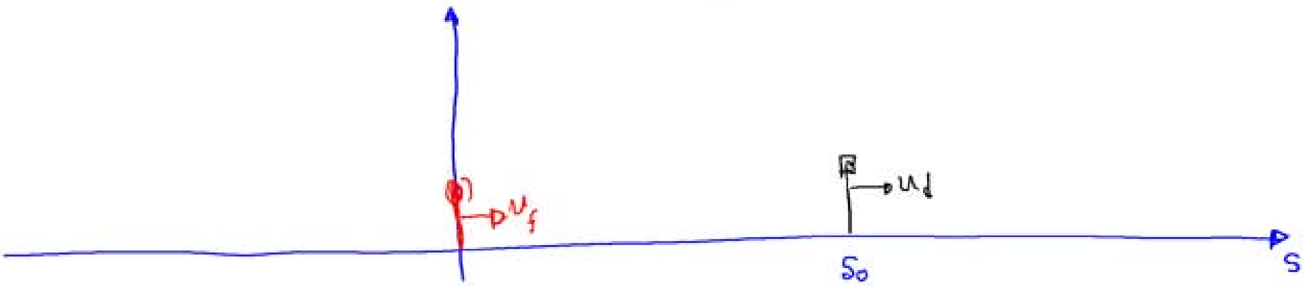
S



tempo entre dois pulsos é $\frac{1}{\nu_f} = T_f$

Vamos considerar uma distância inicial S_0, calcular o tempo t_1 para a onda encontrar o detector (se $v > u_d$); encontrar t_2 para a segunda onda e então obter o período detectado, dado por $(t_2 - t_1) = T_d$.

t_1.



$S_{F1} = vt$

$S_d = S_0 + u_d . t$

$\Rightarrow S_{F1} = S_d$

$v t_1 = S_0 + u_d t_1$

$t_1 (v - u_d) = S_0$

$t_1 = \dfrac{S_0}{(v - u_d)}$

Obs: se $S_0 < 0$
$v \rightarrow -v$

Após um período T_0 a fonte estará em $S_{0,F2} = u_f . T_0$ e o detector estará em $S_{0,d2} = u_d . T_0 + S_0$

deste momento (T_0) em diante a 2ª frente de onda encontra o detector em t'; e $t_2 = T_0 + t'$.

obter t'.

$S_{F2} = S_{0,F2} + v t' = u_f T_0 + v t'$

$S_{d2} = S_{0,d2} + u_d t' + S_0 = u_d T_0 + S_0 + u_d t'$

encontros em $t' (v - u_d) = T_0 (u_d - u_f) + S_0$

$$\Rightarrow \quad t' = \frac{(u_d - u_f)\, T_0 + S_0}{(v - u_d)}$$

$$t_2 = T_0 + t'$$

$$t_2 = T_0 + \frac{(u_d - u_f)}{(v - u_d)} T_0 + \frac{S_0}{(v - u_d)}$$

período no detector.

$$T_d = (t_2 - t_1) = T_0 + \frac{u_d - u_f}{v - u_d} T_0 + \cancel{\frac{S_0}{(v - u_d)}} - \cancel{\frac{S_0}{(v - u_d)}}$$

$$T_d = T_0 \left(1 + \frac{u_d - u_f}{v - u_d} \right)$$

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{f_0}{1 + \frac{u_d - u_f}{v - u_d}} \qquad f_d = \frac{f_0 (v - u_d)}{v \cancel{- u_d} \cancel{+ u_d} - u_f}$$

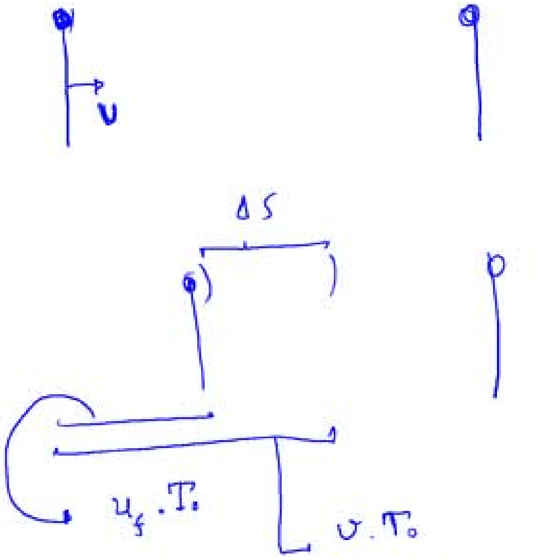
$$\boxed{f_d = f_0 \frac{(v - u_d)}{(v - u_f)}}$$

Ex: Se $u_d = 0$ $\Rightarrow f_d = \dfrac{f_0}{1 - \frac{u_f}{v}}$ (fonte aproximando)

se $S_0 < 0 \Rightarrow v \to -v$ (fonte afastando)

$$f_d = \frac{f_0}{1 + \frac{u_f}{v}}$$

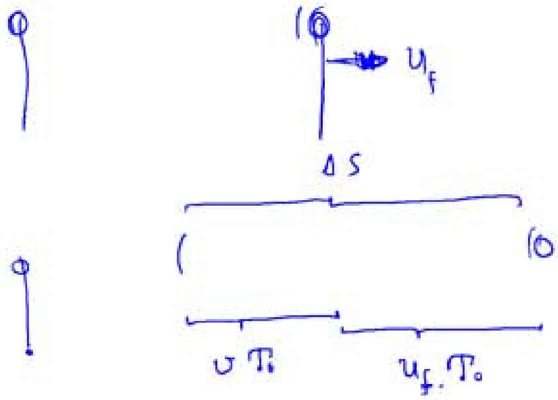
"Só pra conferir, caso particular"



$$T_d = \frac{\Delta S}{v} = \frac{v T_0 - u_f T_0}{v} = \frac{T_0 (v - u_f)}{v}$$

$$f_d = \frac{f_0 . v}{v - u_f}$$

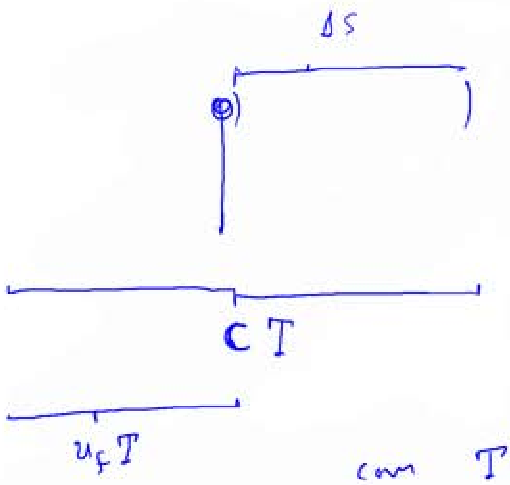
— " —



$$T_d = \frac{\Delta S}{v} = \frac{T_0 (v + u_f)}{v} \qquad f_d = \frac{f_0 v}{v + u_f}$$

ops... conforto, massa.

Doppler Relativístico aproximação.



com $T = \gamma T_0$

$$\Delta s = T\,(c - u_f)$$

$$\Delta s = \gamma T_0\,(c - u_f)$$

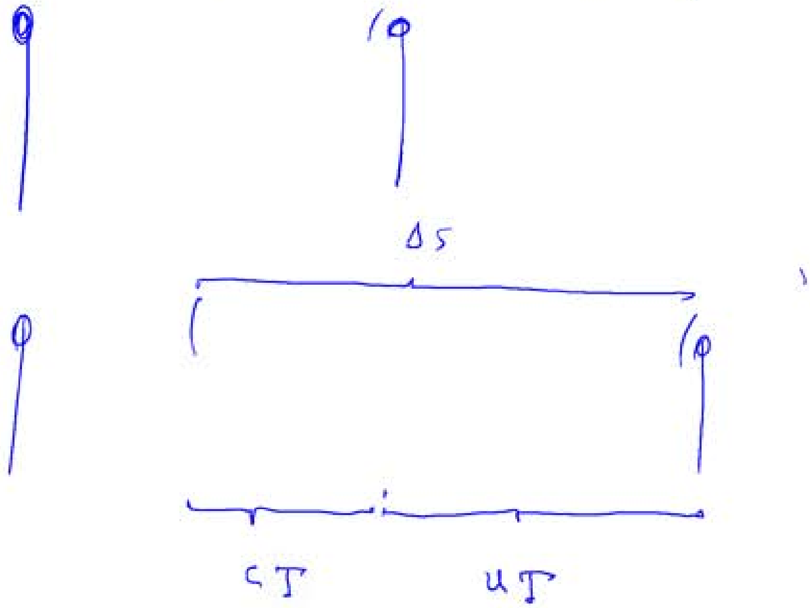
$$T_d = \frac{\Delta s}{c} = \gamma T_0 \left(1 - \frac{u_f}{c}\right)$$

$$T_d = T_0 \cdot \frac{\left(1 - \frac{u_f}{c}\right)}{\left(1 - \frac{u_f^2}{c^2}\right)^{1/2}} = T_0 \cdot \frac{\left(1 - \frac{u_f}{c}\right)}{\left(1 + \frac{u_f}{c}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{u}{c}\right)^{1/2}}$$

$$T_d = T_0 \, \frac{\left(1 - v/c\right)^{1/2}}{\left(1 + v/c\right)^{1/2}}$$

$$f_d = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Doppler relativístico se afastando.



$$T = \gamma T_0$$

$$T_d = \frac{\Delta s}{c} = T\frac{(u+c)}{c}$$

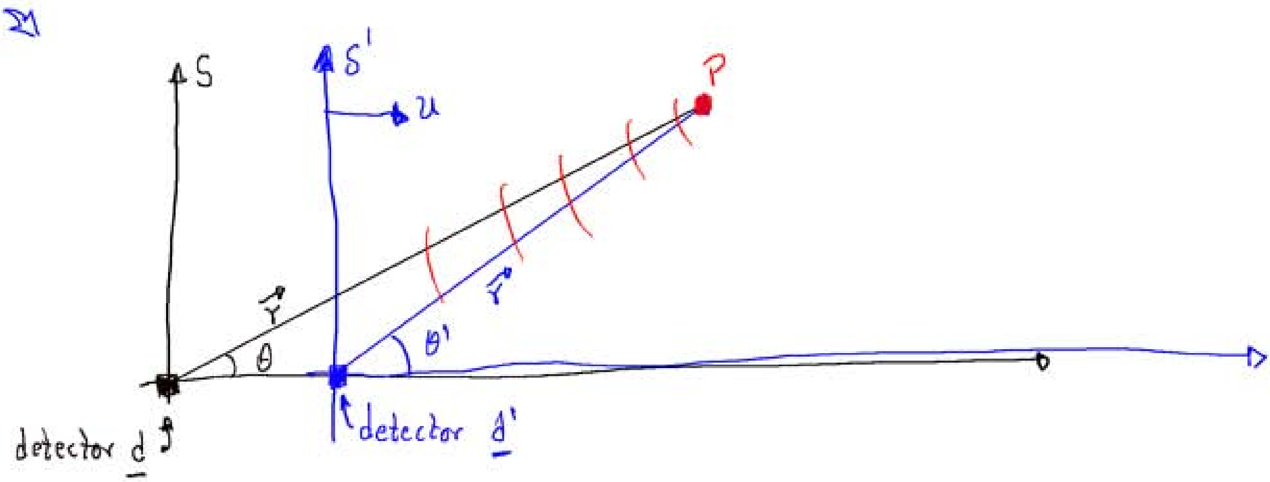
$$T_d = T_0\,\gamma\left(\frac{u}{c}+1\right)$$

$$T_d = T_0\,\frac{1+\beta}{(1+\beta)^{1/2}(1-\beta)^{1/2}} = T_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$f_d = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$ Confere

Efeito Doppler relativístico - Geral

Vamos fixar uma fonte emissora em um ponto $P(x',y')$ de um sistema S' com velocidade $\underline{u}$ relativa ao sistema S. A fonte emissora possui frequência própria f'. Queremos saber qual a frequência percebida em S.



Vamos considerar que as origens cruzam em $t=t'=0$.

O número de pulsos entre $\underline{P}$ e $\underline{d}$ $(\equiv N_0)$ é dado pela quantidade de pulsos por segundo (frequência) vezes o tempo que o primeiro pulso leva para sair de $\underline{P}$ e chegar a $\underline{d}$. Este tempo é dado por $t_0 = \frac{|r|}{c}$. $|r|$ pode ser escrito como $\vec{r}\cdot\hat{r}$.

$$\Rightarrow \quad N_0 = f \cdot \frac{\vec{r}\cdot\hat{r}}{c} \qquad \text{" em } S\text{"}.$$

$\Rightarrow$ Assim o intervalo de tempo entre o 1º e 2º pulso no detector é um período T e o tempo necessário para isso ocorrer é

$\frac{\vec{r}\cdot\hat{r}}{c} + T$. Logo $f\cdot\left(T + \frac{\vec{r}\cdot\hat{r}}{c}\right) = N_0 + 1$

Para S' o raciocínio é análogo e

$$f' \cdot \left(T' - \frac{\vec{r}' \cdot \hat{r}}{c} \right) = N_0' + 1 \qquad \text{" } T' \text{ é período em } S' \text{ "}$$

Como o primeiro e último pulsos são comuns aos dois sistemas referenciais, então $N_0 = N_0'$

$$\Rightarrow f \cdot \left(t + \frac{\vec{r} \cdot \hat{r}}{c} \right) = f' \cdot \left(t' + \frac{\vec{r}' \cdot \hat{r}}{c} \right)$$

inserindo: $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ $\qquad$ $\vec{r}' = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}'$

$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\hat{\jmath}$ $\qquad$ $\hat{r}' = \cos(\theta')\hat{\imath}' + \operatorname{sen}(\theta')\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow f \cdot \left[t + \frac{x\cos(\theta)}{c} + \frac{y\operatorname{sen}(\theta)}{c} \right] = f' \left[t' + \frac{x'\cos(\theta')}{c} + \frac{y'\operatorname{sen}(\theta')}{c} \right]$$

Das equações de Lorentz:

$x = \gamma(x' + ut')$

$y = y'$

$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$

$$\Rightarrow f \left[\gamma t' + \frac{\gamma u x'}{c^2} + \frac{\gamma x' \cos(\theta)}{c} + \frac{\gamma u t' \cos(\theta)}{c} + \frac{y'\operatorname{sen}(\theta)}{c} \right] =$$

$$f' \left[t' + \frac{x'\cos(\theta')}{c} + \frac{y'\operatorname{sen}(\theta')}{c} \right]$$

$$\left(f\gamma + \frac{f\gamma u\cos(\theta)}{c}\right)t' + \left(\frac{f\gamma u}{c^2} + \frac{f\gamma\cos(\theta)}{c}\right)x' + \frac{f\,\mathrm{sen}(\theta)}{c}y' =$$

$$= f't' + \frac{f'\cos(\theta')}{c}x' + \frac{f'\,\mathrm{sen}(\theta')}{c}y'$$

Esse igualdade só é possível, para qualque x', y' e t', se os coeficientes forem iguais. Logo:

$$f\gamma\left(1 + \frac{u\cos(\theta)}{c}\right) = f'$$

$$f = \frac{f'}{\gamma(1+\beta\cos(\theta))}$$, com $\beta = u/c$

Analogamente:

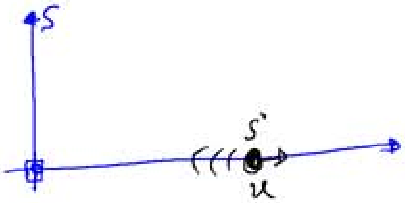
$$\frac{f\gamma}{\cancel{c}}\left(\beta + \cos(\theta)\right) = \frac{f'\cos(\theta')}{\cancel{c}}$$

$$f'\cos(\theta') = f\gamma(\cos(\theta)+\beta)$$

e

$$f\,\mathrm{sen}(\theta) = f'\,\mathrm{sen}(\theta')$$

Exemplo:

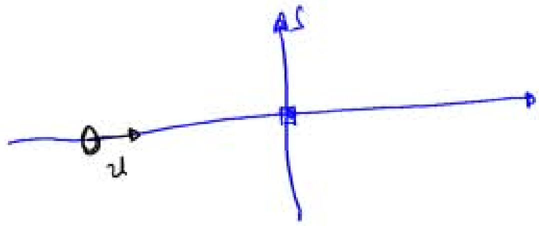


Neste caso $\theta = 0$

$$\Rightarrow f = f' \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1+\beta)} = f' \frac{(1-\beta)^{1/2} \cdot (1+\beta)^{1/2}}{(1+\beta)}$$

$$f = f' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$ "fonte e detector se afastando."

Para $\theta = 180^\circ$ $\Rightarrow$



$$f = \frac{f'(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta)} = f' \frac{(1+\beta)^{1/2} \cdot (1-\beta)^{1/2}}{(1-\beta)}$$

$$f = f' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$ "fonte e detector se aproximando"

—||—

transversal $\Rightarrow \theta = 90^\circ$ $\Rightarrow f = f'(1-\beta^2)^{1/2}$

Exemplos:

* Algumas das linhas espectrais do hidrogênio aparecem no espectro do quasar 3C9, porém tão deslocadas para o vermelho que os comprimentos de onda são 3 vezes maiores que o observado para o hidrogênio em repouso.

(a) Mostre que a equação clássica do efeito Doppler dá uma velocidade relativa de afastamento maior que c.

(b) Adimitindo movimento exclusivo de afastamento, achar a velocidade de afastamento.

Solução:

(a) Classicamente $f = \dfrac{f_0}{1 + \frac{u_f}{c}}$

mas $\lambda = 3\lambda_0$

$\Rightarrow \lambda f = c \Rightarrow f = \dfrac{c}{\lambda} \Rightarrow f = \dfrac{c}{3\lambda_0}$ e $f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{c}}{3\cancel{\lambda_0}} = \frac{\cancel{c}}{\cancel{\lambda_0}\left(1 + \frac{u_f}{c}\right)}$$

$1 + \dfrac{u_f}{c} = 3 \Rightarrow u_f = 2c$

$$\boxed{u_f > c}$$

(b) Relativisticamente: $f = f' \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$, se $\lambda = 3\lambda_0$

e $f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \Rightarrow \dfrac{f}{f_0} = \dfrac{c/3\lambda_0}{c/\lambda_0} = \dfrac{\cancel{c}}{3\cancel{\lambda_0}} \cdot \dfrac{\cancel{\lambda_0}}{\cancel{c}}$ $\quad f = \dfrac{f_0}{3}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f'}{3}\right)^2 = f'^2 \dfrac{(1-\beta)}{(1+\beta)}$; $\dfrac{f'^2}{9} + \dfrac{f'^2}{9}\beta = f'^2 - f'^2\beta$

$$\beta \cancel{f'^2}\left(1+\frac{1}{9}\right) = \cancel{f'^2}\left(1-\frac{1}{9}\right)$$

$$u_f = c\,\frac{(1-1/9)}{(1+1/9)} \qquad \boxed{u_f = 0{,}8c}$$

* Calcule o deslocamento Doppler, $\lambda - \lambda'$, se houver, para a linha D_2 (589,00 nm) do sódio, emitida por uma fonte que se move em círculo com velocidade 0,100c, que seria medido por um observador no centro.

$\Rightarrow$ transversal $\Rightarrow$ $$f = f'\,\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1+\beta\cos(\theta))}$$

Para $\theta = 90°$ $\cos(\theta) = 0$
e $\beta = 0{,}100$

$$\lambda = \frac{c}{f} \qquad \lambda' = \frac{c}{f'} \quad \Rightarrow \quad \lambda - \lambda' = c\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right)$$

$$\lambda - \lambda' = c\left[\frac{1}{f'(1-0{,}1^2)^{1/2}} - \frac{1}{f'}\right]$$

$$\Delta\lambda = \frac{c}{f'}\cdot\left(\frac{1}{(1-0{,}1^2)^{1/2}} - 1\right) = \frac{c}{f'}\cdot 0{,}02$$

$$f' = \frac{c}{\lambda'}$$

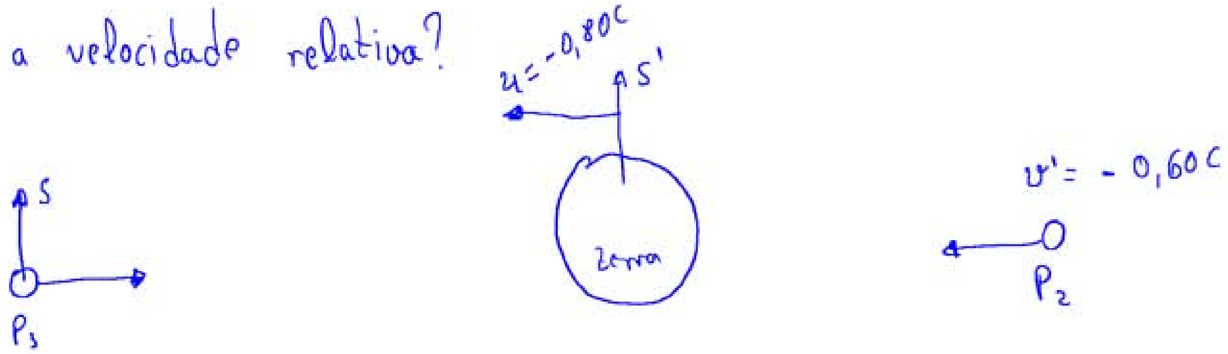
$$\Delta\lambda = \frac{c}{c}\,\lambda'\,0{,}02 \qquad \Delta\lambda = 0{,}02 \cdot 589{,}00 \cdot nm$$

$$\boxed{\Delta\lambda = 11{,}78\ nm}$$

Transformação de velocidades.

* Uma partícula de raios cósmicos se aproxima do polo norte com $v_N = 0,80c$. Outra se aproxima do polo sul com $v_S = 0,60c$.

Qual a velocidade relativa?



$$\Rightarrow v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}} = \frac{-1,40c}{1 + 0,80 \cdot 0,60} = -0,95c$$

em módulo $\boxed{v = 0,95c}$